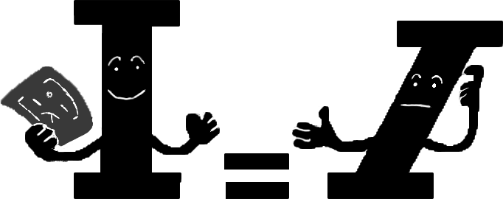
به نام خدا



پاسخ تمرین پنجم

جبر خطی کاربردی – پاییز 1400

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

1- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) دو وکتور متعامد هستند اگر و تنها اگر .

* درست. تئوری 6.2 کتاب درسی.

ب) اگر ستون های ماتریس ، باشند، آنگاه .

* درست، بخش تئوری 6.8 کتاب درسی.

ج) در صورتی که در معادله ، یک بردار نسبت به تمامی بردار های ستونی ماتریس باشد، آنگاه جواب برای این معادله تمامی بردار های خواهند بود که

.

* درست، در صورتی که بردار بر تمامی بردار های ستونی ماتریس عمود باشد، آنگاه تصویر بردار بر روی برابر باشد. پس بنابراین می توان جواب مساله را به صورت می توان نوشت.

د) هر ماتریس دلخواهی را می توان به فرم تجزیه نوشت.

* نادرست، همانطور که در تعریف نیز مشاهده می شود، این تعریف برای ماتریس های با ستون های مستقل خطی تعریف شده است و اعمال این تجزیه، بر روی تمامی ماتریس ها امکان پذیر نیست.

ذ) هر ماتریس متقارن ، تا مقدار ویژه ی حقیقی متمایز دارد.

* غلط. تا مقدار ویژه دارد ولی لزومی ندارد متمایز باشند.

ه) در یک عبارت مثبت معین مانند به ازای تمام ها در مقدار بزرگتر از صفر می باشد.

* غلط. در مقدار برابر است با صفر.

پ) اگر مقدار ویژه های یک ماتریس متقارن مانند ، همگی منفی باشند، آنگاه فرم درجه دوم ، نامعین است.

* غلط. منفی معین است. (تئوری 5 فصل 7 کتاب درسی)

2- وکتور های زیر را در نظر بگیرید.

همچنین وکتور که بر وکتور های عمود است و را در نظر بگیرید. عبارت های خواسته شده را محاسبه کنید.

الف)

ب)

پ)

ج)

چ) فاصله بین و

**پاسخ**

الف)

ب) از آنجا که بر عمود است، پس .

پ) مشابه قسمت قبل داریم:

ج) می دانیم که طول یک وکتور برابر است با: . پس داریم:

چ) می‌دانیم که فاصله بین دو وکتور برابر است با . پس ابتدا وکتور را محاسبه می کنیم و سپس اندازه آن را بدست می آوریم.

3- فرض کنید وکتور هایی در باشند به طوریکه و .

طول وکتور را بدست آورید.

**پاسخ**

می دانیم طول یک وکتور برابر است با و همچنین ضرب داخلی دو وکتور خاصیت جا به جایی دارد پس داریم:

طبق بالا:

حال مقدار محاسبه می کنیم:

4- فرض کنید یک مجموعه متشکل از وکتور های غیر صفر در باشد. اگر مجموعه یک مجموعه باشد، آنگاه:

الف) نشان دهید که یک مجموعه مستقل خطی است.

ب) اگر ، آنگاه نشان دهید که یک پایه برای است.

**پاسخ**

الف) طبق تعریف استقلال خطی می دانیم برای اینکه این مجموعه مستقل خطی باشد، معادله زیر فقط باید جواب داشته باشد.

یعنی .

بدین منظور به ازای هر ضرب داخلی در عبارت بالا را محاسبه می کنیم. داریم:

از آنجا که یک مجموعه متعامد است، پس به ازای هر ، . بنابراین در معادله بالا همه عبارت ها به جز عبارت ام برابر 0 هستند. داریم:

و از آنجا که پس اندازه آن نیز 0 نخواهد بود. پس می توان نتیجه گرفت که به ازای . بنابراین طبق تعریف استقلال خطی، این مجموعه مستقل خطی است.

ب) اگر ، آنگاه طبق قسمت الف مجموعه ای متشکل از وکتور مستقل خطی در خواهیم داشت. بنابراین یک برای خواهد بود و می توان گفت یک پایه برای آن است.

5- تجزیه ماتریس را محاسبه کنید.

**پاسخ**

همانطور که مشاهده می شود، ستون های ماتریس مستقل خطی است. برای تجزیه ماتریس به فرم باید در ابتدا یک پایه برای فضای پیدا کرد. برای این کار می توانیم از الگوریتم استفاده کنیم.

بردار های مستقل ما به شکل زیر می باشد.

طبق الگوریتم داریم:

خب تا به این جا بردار های را محاسبه کرده ایم.

اما برای محاسبه لازم است که پایه حاصل را به یک پایه تبدیل کنیم. برای این کار لازم است که هر یک از بردار ها را کنیم.

خب حال که یک پایه برای پیدا کردیم، می توانیم ماتریس را تشکیل دهیم.

حال که را به دست آوردیم، باید را محاسبه کنیم. برای محاسبه این ماتریس، از آن جایی که ماتریس یک ماتریس با ستون های است پس بنا به قضیه 6 کتاب، . پس می توان رابطه تجزیه را به صورت زیر نوشت و با محاسبه یک ضرب ماتریس، را محاسبه کرد.

6- فرض کنید که ماتریس یک ماتریس باشد به گونه ای که وارون پذیر می باشد. نشان دهید که در این صورت ستون های ماتریس ، مستقل خطی می باشند.

**پاسخ**

فرض کنید که معادله را داریم. در صورتی که در دو سمت معادله از سمت چپ ماتریس را ضرب کنیم خواهیم داشت از آنجایی که ماتریس وارون پذیر است، بنابراین می توان گفت . بنابراین معادله تنها یک جواب بدیهی دارد پس بنابراین طبق تعریف استقلال خطی، ستون های ماتریس مستقل خطی خواهند بود.

7- ماتریس را قطری سازی عمودی کنید.

**پاسخ**

مقادیر ویژه ی را به دست می آوریم:

اکنون یک پایه از هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم:

در نهایت داریم:

8- عبارت را در نظر بگیرید.

الف) مشخص کنید که آیا مثبت معین است یا منفی معین یا نامعین؟

ب) عبارت را با تغییر متغیر به یک فرم (چند جمله ای درجه 2) که هیچ عبارت ضرب متقابل ( مثل ) یا همان ای ندارد تبدیل کنید.

**پاسخ**

الف) ابتدا ماتریس را به دست می آوریم:

اکنون مقادیر ویژه ی را به دست می آوریم:

از آنجایی که هر دو مقدار ویژه ی ، مثبت بودند طبق تئوری 5 فصل 7 کتاب درسی، مثبت معین است.

ب ) ابتدا بردار ویژه ی هر مقدار ویژه را به دست می آوریم و آن را نرمال می کنیم و ماتریس را تشکیل می دهیم ():

اکنون در نظر می گیریم و داریم:

9- تجزیه مقادیر منفرد ماتریس را بیابید. تمام محاسبات خود را نشان دهید.

پاسخ:

=

مقدار های ویژه برای A : است. در نتیجه

سپس پایه های orthogonal برابر میشود با : و

برای پیدا کردن از فرمول استفاده میکنیم.

از آنجایی که و هم نیاز داریم و باید پایه های orthogonal باشند پس :

10- ثابت کنید اگر یک ماتریس مثبت معین باشد، آن گاه قطری سازی عمودی ماتریس ،

برابر با تجزیه آن خواهد بود.

پاسخ:

در قطری سازی عمودی، ماتریس که ساخته می شود، دارای ستون های orthonormal می باشد بنابراین در این حالت داریم

اگر یک ماتریس positive definite باشد آنگاه که P یک ماتریس orthogonal بوده و یک ماتریس diagonal است. درایه های قطری ماتریس مثبت اند زیرا آنها eigenvalue های یک ماتریس positive definite هستند.از آنجایی که P یک ماتریس orthogonal است، میتوان گفت و ماتریس مربعی وارون پذیر است.همچنین داریم بنابراین یک ماتریس orthogonal است. بنابراین ویژگی هایی دارد که آنرا SVD میکند.

موفق باشید

تیم تدریسیاری جبر خطی پاییز 1400